การประยุกต์ใช้หลักของวิธีกำลังสองน้อยที่สุดในการวิเคราะห์ข้อมูลทางด้านวิทยาศาสตร์

(Least Square Method: Application to Scientific Data Analysis)

เรียบเรียงโดย

ดร.ชัชวาล ศรีภักดี

สาขาวิชาฟิสิกส์

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร

11 ธันวาคม 2554

ในการจัดการกับปัญหาที่ค่อนข้างยากทางด้านกายภาพมักมีสถานการณ์ที่ค่าของตัวแปรต่างๆที่ต้องการทราบหรือต้องการหาค่า ถูกชักนำไปสู่ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ของค่าสังเกตหรือค่าคาดหมายของตัวแปร โดยไม่สามารถหาค่าออกมาได้อย่างแม่นตรง แต่ก็ยังมีฟังก์ชันที่แสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรทางกายภาพเหล่านั้นเกิดขึ้น ดังนั้น เราจึงต้องหาค่าโดยประมาณของตัวแปรทางกายภาพเหล่านั้นที่เหมาะสมมากที่สุดของความสัมพันธ์ออกมาให้ได้ วิธีการประมาณค่าที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ คือ "วิธีกำลังสองน้อยที่สุด" (Least square method) ซึ่งคิดค้นโดยนักคณิตศาสตร์และฟิสิกส์ ชาวเยอรมัน ชื่อ เกาสส์ (Gauss) ในปี ค.ศ. 1795 และต่อมาได้รับความนิยมอย่างแพร่หลายหลังจากการตีพิมพ์ของ นักคณิตศาสตร์ ชาวฝรั่งเศสชื่อ เลอจองด์ (Legendre) ในปี ค.ศ. 1805

สมมติว่าเรามีระบบสมการเชิงเส้นจำนวน n สมการ และแต่ละสมการมีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าจำนวน m ตัว คือ $x_1, x_2, x_3, ..., x_m$ ดังนี้

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & .... & ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}\right\} \tag{1}$$

โดยที่ สัมประสิทธิ์ a_{ij} และ b_i เป็นค่าคงที่ สมการ(1) เขียนในรูปแมตริกซ์ ได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

ในกรณีที่ $n = m$ จะมีเซตเจาะจงเพียงเซตเดียวเท่านั้นที่เป็นคำตอบของสมการ(1) แต่ถ้า $n > m$ ซึ่งก็คือมีจำนวนสมการมากกว่าจำนวนตัวแปร โดยทั่วไป จะไม่มีคำตอบของระบบสมการนี้ แต่อาจมีเซตคำตอบเจาะจงเพียงเซตเดียวก็ได้ ในขณะที่ $n < m$ โดยทั่วไป จะมีคำตอบได้หลายชุดและค่าที่เป็นไปได้มากที่สุดของตัวแปรที่สอดคล้องกับสมการ(1) หรือ (2) สามารถหาได้จาก "หลักของวิธีกำลังสองน้อยที่สุด" โดยยึดหลักที่ว่า ค่าของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าจะสะท้อนถึงค่าที่ต่ำที่สุดของ S โดย

$$S = R_1^2 + R_2^2 + ... + R_n^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} R_\alpha^2 \tag{3}$$

เรียก S ว่า ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองรวม และเรียก $R_1, R_2, ..., R_\alpha, ..., R_n$ ว่า เศษเหลือตกค้างหรือค่าคลาดเคลื่อนย่อย (โดยที่ $\alpha \in 1, 2, 3, ..., n$) กำหนดโดย

$$R_\alpha = (a_{\alpha 1}x_1 + a_{\alpha 2}x_2 + ... + a_{\alpha m}x_m +) - b_\alpha \tag{4}$$

ค่าคลาดเคลื่อนจะมีค่าน้อยที่สุดเมื่อ S มีค่าต่ำสุด โดยสามารถหาตัวแปรที่ไม่ทราบค่า x_α ได้จากเงื่อนไข

$$\frac{\partial S}{\partial x_\alpha} = 0 \qquad \text{เมื่อ} \quad \alpha = 1, 2, 3, ..., m \tag{5}$$

หรือ

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = \frac{\partial S}{\partial x_2} =, ..., = \frac{\partial S}{\partial x_m} = 0 \tag{6}$$

ถ้าหากว่า

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x_\alpha^2} > 0. \quad \text{สำหรับทุกค่า} \quad \alpha = 1, 2, 3, ..., m.$$

เรียกสมการ (5) และ (6) ว่า สมการปกติ (Normal Equations)

<u>**ตัวอย่างที่ 1**</u> จงหาค่า x, y, z ที่เป็นไปได้มากที่สุด โดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด จากระบบสมการต่อไปนี้

$$\left.\begin{aligned} x - y + 2z &= 3 \\ 3x + 2y - 5z &= 5 \\ 4x + y + 4z &= 21 \\ -x + 3y + 3z &= 14 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

<u>**วิธีทำ**</u> จากสมการ(7) จะพบว่าระบบมี 4 สมการ แต่มีจำนวนตัวแปรเพียง 3 ตัวแปร จากสมการ(4) จะได้ เศษเหลือตกค้างของแต่ละสมการย่อยทั้ง 4 ดังนี้

$$\begin{aligned} R_1 &= x - y + 2z - 3, \\ R_2 &= 3x + 2y - 5z - 5, \\ R_3 &= 4x + y + 4z - 21, \\ R_4 &= -x + 3y + 3z - 14, \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$S = (x - y + 2z - 3)^2 + (3x + 2y - 5z - 5)^2 + (4x + y + 4z - 21)^2 + (-x + 3y + 3z - 14)^2$$

สมการปกติที่สอดคล้องกำหนดโดย $\frac{\partial S}{\partial x} = 0, \frac{\partial S}{\partial y} = 0$ และ $\frac{\partial S}{\partial z} = 0$ จึงได้

$$\begin{aligned} 27x + 6y &= 88 \\ 6x + 15y + z &= 70 \\ -y + 54z &= 107 \end{aligned}$$

แก้ระบบสมการนี้จะได้คำตอบ $x = 2.47, y = 3.55$ และ $z = 1.92$ ซึ่งเป็นค่าที่เป็นไปได้มากที่สุดของคำตอบของระบบสมการ(7) และยังพบอีกว่า $\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}$ และ $\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}$ ให้ค่าบวกสำหรับค่า x, y, z ดังกล่าว

<u>**ตอบ**</u>

การเขียนเส้นโค้งให้ฟิตกับข้อมูลด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด
(Curve-fitting by least square method)

เราสามารถประยุกต์หลักของวิธีกำลังสองน้อยที่สุด เพื่อที่จะฟิตข้อมูลเชิงตัวเลขให้เข้ากันได้กับรูปแบบตัวแทนเชิงวิเคราะห์หรือโพลิโนเมียลดีกรีต่างๆที่เราสนใจมากที่สุด นั่นคือ เราต้องการฟังก์ชันที่เป็นตัวแทนของข้อมูลนั่นเอง นอกจากการฟิตข้อมูลด้วยโพลิโนเมียลแล้ว เรายังสามารถฟิตข้อมูลกับความสัมพันธ์รูปแบบอื่นได้ด้วย เช่น แบบพีชคณิต แบบเอ็กซ์โปเนนเชียลหรือแบบลอการิธึม เป็นต้น

สมมติว่าเรามีคู่อันดับของข้อมูลตัวแปรต้นและตัวแปรตามจากการสังเกตหรือการทดลองเขียนอยู่ในรูปของ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$ และเราต้องการฟิตข้อมูลนี้กับโพลิโนเมียลดีกรี p ซึ่งอยู่ในรูป

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_p x^p \tag{8}$$

โดยที่ สัมประสิทธิ์ $a_0, a_1, a_2, ..., a_p$ หาได้จากวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ดังจะนำเสนอต่อไป

การประมาณค่าของ y สำหรับ (x_1, y_1) คือ $a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + ... + a_p x_1^p$ โดยมี y_1 เป็นค่าสังเกต ดังนั้น ค่าคลาดเคลื่อน E_1 ที่เกิดขึ้น คือ

$$E_1 = y_1 - (a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + ... + a_p x_1^p) \tag{9}$$

ทำนองเดียวกัน ค่าคลาดเคลื่อน $E_1, E_2, ..., E_n$ ที่เกิดขึ้น คือ

$$\begin{aligned} E_2 &= y_2 - (a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + ... + a_p x_2^p) \\ .. \quad &.. \quad .... \\ E_n &= y_n - (a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + ... + a_p x_n^p) \end{aligned} \tag{10}$$

ดังนั้น ผลรวมของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองของการประมาณ คือ

$$S = E_1^2 + E_2^2 + ... + E_n^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} E_\alpha^2$$

และมีสมการปกติที่สอดคล้อง คือ

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0, ..., \frac{\partial S}{\partial a_p} = 0.$$

ซึ่งผลจากการดำเนินการหาอนุพันธ์ข้างต้นนี้ จะพบว่ามีพจน์ต่างๆต่อไปนี้เกิดขึ้น คือ

$$\left.\begin{aligned} \sum y &= n a_0 + a_1 \sum x + a_2 \sum x^2 + ... + a_p \sum x^p \\ \sum xy &= a_0 \sum x + a_1 \sum x^2 + a_2 \sum x^3 + ... + a_p \sum x^{p+1} \\ \sum x^2 y &= a_0 \sum x^2 + a_1 \sum x^3 + a_2 \sum x^4 + ... + a_p \sum x^{p+2} \\ .... \quad &.. \quad .... \\ \sum x^p &= a_0 \sum x^p + a_1 \sum x^{p+1} + a_2 \sum x^{p+2} + ... + a_p \sum x^{2p} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

ระบบสมการจำนวน $p+1$ สมการนี้ ทำให้เราสามารถหาค่า ส.ป.ส. $a_0, a_1, a_2, ..., a_p$ ที่ต้องการได้เพียงเซตเดียวเท่านั้นที่เมื่อนำไปแทนลงในสมการ(8) แล้วได้ฟังก์ชันตัวแทนของข้อมูลดิบเหล่านั้น

ข้อสังเกตที่ 1 หากโพลิโนเมียล ตามสมการ (8) มีดีกรีเท่ากับ 1 (หรือ $p = 1$) จะได้ ความสัมพันธ์แบบเส้นตรง คือ $y = a_0 + a_1 x$ นั่นเอง โดยมีสมการปกติ คือ

$$\left.\begin{aligned} \sum y &= na_0 + a_1 \sum x \\ \sum xy &= a_0 \sum x + a_1 \sum x^2 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ ดังนี้ จาก

$$S = \sum_{\alpha=1}^{n} E_\alpha^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} (y_\alpha - (a_0 + a_1 x_\alpha))^2 .$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a_0} &= \frac{\partial}{\partial a_0} \sum_{\alpha=1}^{n} (y_\alpha - (a_0 + a_1 x_\alpha))^2 = 0 \\ &= 2 \sum_{\alpha=1}^{n} (y_\alpha - (a_0 + a_1 x_\alpha)) \frac{\partial}{\partial a_0} (y_\alpha - (a_0 + a_1 x_\alpha)) = 0 \\ &= 2 \sum_{\alpha=1}^{n} (y_\alpha - (a_0 + a_1 x_\alpha))(0 - (1 + 0)) = 0 \\ &= -2 \left(\sum_{\alpha=1}^{n} y_\alpha - (\sum_{\alpha=1}^{n} a_0 + a_1 \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha) \right) = 0 \end{aligned}$$

จึงได้

$$\sum_{\alpha=1}^{n} y_\alpha = na_0 + a_1 \sum_{\alpha}^{n} x_\alpha \tag{13}$$

และ ยังได้อีกว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a_1} &= \frac{\partial}{\partial a_1} \sum_{\alpha=1}^{n} (y_\alpha - (a_0 + a_1 x_\alpha))^2 = 0 \\ &= 2 \sum_{\alpha=1}^{n} (y_\alpha - (a_0 + a_1 x_\alpha)) \frac{\partial}{\partial a_1} (y_\alpha - (a_0 + a_1 x_\alpha)) = 0 \\ &= 2 \sum_{\alpha=1}^{n} (y_\alpha - (a_0 + a_1 x_\alpha))(0 - (0 + x_\alpha)) = 0 \\ &= -2 \left(\sum_{\alpha=1}^{n} (y_\alpha x_\alpha - (a_0 x_\alpha + a_1 x_\alpha^2)) \right) = 0 \end{aligned}$$

หรือ

$$\sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha y_\alpha = a_0 \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha + a_1 \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha^2 \tag{14}$$

สมการ(13) และ (14) เป็นส่วนหนึ่งของสมการปกติ (12) สามารถนำไปใช้หา ส.ป.ส a_0 และ a_1 แล้วจึงนำไปแทนค่าลงในสมการ (8) ก็จะได้สมการเส้นตรงตามต้องการ

<u>ข้อสังเกตที่ 2</u> หากโพลิโนเมียล ตามสมการ (8) มีดีกรีเท่ากับ 2 (หรือ $p = 2$) จะได้ความสัมพันธ์แบบพาราโบลา คือ $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ นั่นเอง โดยมีสมการปกติ คือ

$$\left.\begin{array}{rcl} \sum y & = & na_0 + a_1 \sum x + a_2 \sum x^2 \\ \sum xy & = & a_0 \sum x + a_1 \sum x^2 + a_2 \sum x^3 \\ \sum x^2 y & = & a_0 \sum x^2 + a_1 \sum x^3 + a_2 \sum x^4 \end{array}\right\} \tag{15}$$

ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้โดยง่าย ดังนี้

จาก $S = \sum_{\alpha=1}^{n} E_\alpha^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} (y_\alpha - (a_0 + a_1 x_\alpha + a_2 x_\alpha^2))^2$

เช่นเดียวกับกรณีของข้อสังเกตที่ 1 จะได้สมการปกติของ ส.ป.ส ที่เกี่ยวข้อง คือ

- <u>สำหรับ ส.ป.ส a_0</u> จะได้

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} & = & \dfrac{\partial}{\partial a_0} \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{n} (y_\alpha - (a_0 + a_1 x_\alpha + a_2 x_\alpha^2))^2 = 0 \\ & = & 2 \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{n} (y_\alpha - (a_0 + a_1 x_\alpha + a_2 x_\alpha^2)) \dfrac{\partial}{\partial a_0} (y_\alpha - (a_0 + a_1 x_\alpha + a_2 x_\alpha^2)) = 0 \\ & = & 2 \left(\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{n} y_\alpha - (\sum_{\alpha=1}^{n} a_0 + a_1 \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha + a_2 \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha^2) \right) = 0 \end{array}$$

จึงได้

$$\sum_{\alpha=1}^{n} y_\alpha = na_0 + a_1 \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha + a_2 \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha^2 \tag{16}$$

- <u>สำหรับ ส.ป.ส a_1</u> จะได้

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial S}{\partial a_1} & = & \dfrac{\partial}{\partial a_1} \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{n} (y_\alpha - (a_0 + a_1 x_\alpha + a_2 x_\alpha^2))^2 = 0 \\ & = & 2 \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{n} (y_\alpha - (a_0 + a_1 x_\alpha + a_2 x_\alpha^2)) \dfrac{\partial}{\partial a_1} (y_\alpha - (a_0 + a_1 x_\alpha + a_2 x_\alpha^2)) = 0 \\ & = & 2 \left(\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha y_\alpha - (a_0 \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha + a_1 \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha^2 + a_2 \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha^3)) \right) = 0 \end{array}$$

จึงได้

$$\sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha y_\alpha = a_0 \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha + a_1 \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha^2 + a_2 \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha^3 \tag{17}$$

- <u>สำหรับ ส.ป.ส a_2</u> จะได้

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial S}{\partial a_2} & = & \dfrac{\partial}{\partial a_2} \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{n} (y_\alpha - (a_0 + a_1 x_\alpha + a_2 x_\alpha^2))^2 = 0 \\ & = & 2 \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{n} (y_\alpha - (a_0 + a_1 x_\alpha + a_2 x_\alpha^2)) \dfrac{\partial}{\partial a_2} (y_\alpha - (a_0 + a_1 x_\alpha + a_2 x_\alpha^2)) = 0 \\ & = & 2 \left(\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha^2 y_\alpha - (a_0 \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha^2 + a_1 \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha^3 + a_2 \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha^4)) \right) = 0 \end{array}$$

จึงได้

$$\sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha^2 y_\alpha = a_0 \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha^2 + a_1 \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha^3 + a_2 \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha^4 \tag{18}$$

สมการ (16), (17) และ (18) ก็คือ ส่วนย่อยของสมการ(15) นั่นเอง ซึ่งจะทำให้ทราบค่า a_0, a_1 และ a_2 เมื่อนำไปแทนค่าลงในสมการ(8) ก็จะได้สมการพาราโบลา ตามที่ต้องการ

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงฟิตความสัมพันธ์ของข้อมูลระหว่าง x และ y ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของสมการเส้นตรง

x	0	1	2	3	4
y	0	1.8	3.3	4.5	6.3

พร้อมทั้งเขียนกราฟแสดงผลการเปรียบเทียบ

<u>วิธีทำ</u> ความสัมพันธ์เส้นตรงที่ต้องการ คือ

$$y = a_0 + a_1 x \tag{19}$$

จึงต้องหาค่า a_0 และ a_1 โดยอาศัยข้อสังเกตที่ 1 และมีสมการปกติที่สอดคล้อง คือ

$$\left.\begin{array}{rcl} \sum y &=& na_0 + a_1 \sum x \\ \sum xy &=& a_0 \sum x + a_1 \sum x^2 \end{array}\right\} \tag{20}$$

จากโจทย์พบว่า $p = n = 5$ โดยสามารถ แจงค่าต่างๆที่เกี่ยวข้องกับสมการ(20) ในรูปตารางได้ ดังนี้

x	0	1	2	3	4	$\therefore \sum x = 10$
y	0	1.8	3.3	4.5	6.3	$\therefore \sum y = 15.9$
xy	0	1.8	6.6	13.5	25.2	$\therefore \sum xy = 47.1$
x^2	0	1	4	9	16	$\therefore \sum x^2 = 30$

จากตารางนี้แทนค่าจากคอลัมน์ขวามือสุดลงในสมการ (20) จะได้ สมการของ ส.ป.ส คือ

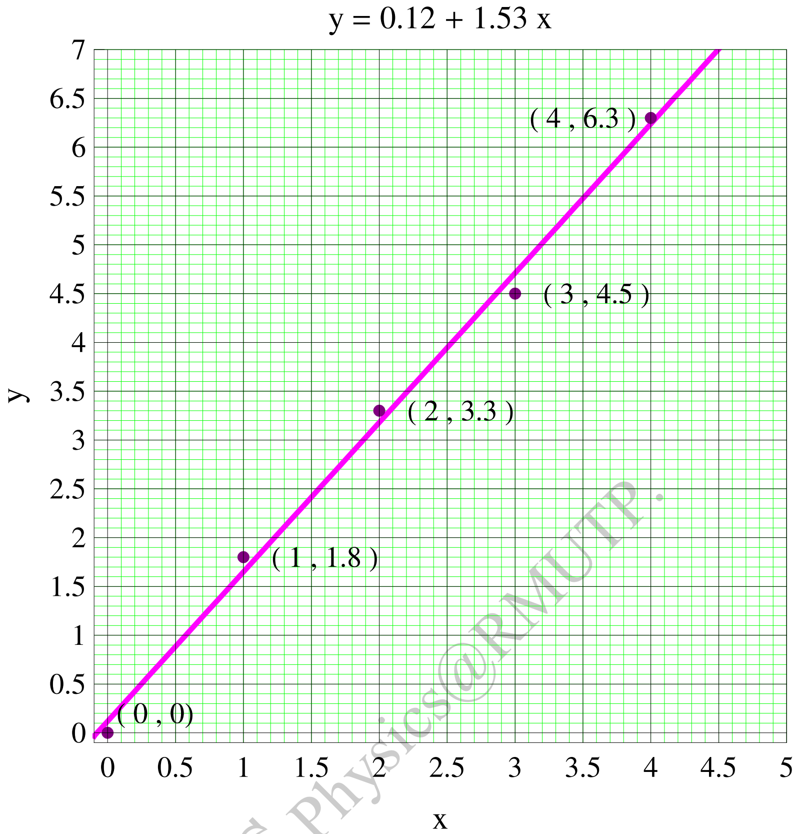
$$\left.\begin{array}{rcl} 15.9 &=& 5a_0 + 10a_1 \\ 47.1 &=& 10a_0 + 30a_1 \end{array}\right\} \tag{21}$$

แก้สมการนี้จะได้ $a_0 = 0.12, a_1 = 1.53$ ดังนั้น สมการเส้นตรงที่สอดคล้อง คือ

$$y = 0.12 + 1.53x$$

<u>ตอบ</u>

โดยมีกราฟแสดงผลการฟิตสมการนี้กับข้อมูลแสดงดังรูป



รูปที่ 1: แสดงผลการฟิตข้อมูลเทียบกับสมการเส้นตรงที่ได้จากการวิเคราะห์ข้อมูลด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด

ตัวอย่างที่ 3 จงฟิตข้อมูลต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของสมการพาราโบลา

x	0	1	2	3	4	5
y	0	1,090	1,220	1,390	1,625	1,915

พร้อมทั้งเขียนกราฟแสดงผลการเปรียบเทียบ

วิธีทำ เราจะเปลี่ยนตัวแปรและสเกลจุดตำแหน่งของมันใหม่โดยให้

$$\begin{aligned} u &= x-3 \\ v &= \frac{y-1,450}{5} \end{aligned}$$

โดยมีความสัมพันธ์แบบสมการพาราโบลาที่ต้องการ คือ

$$v = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 \tag{22}$$

สมการปกติที่สอดคล้องกับสมการ(22) คือ

$$\left.\begin{array}{rcl} \sum v &=& na_0 + a_1\sum u + a_2\sum u^2 \\ \sum uv &=& a_0\sum u + a_1\sum u^2 + a_2\sum u^3 \\ \sum u^2 v &=& a_0\sum u^2 + a_1\sum u^3 + a_2\sum u^4 \end{array}\right\} \tag{23}$$

โดยมี

u	-2	-1	0	1	2	$\therefore \sum u = 0$
v	-72	-46	-12	35	93	$\therefore \sum v = -2$
uv	144	46	0	35	186	$\therefore \sum uv = 411$
u^2	4	1	0	1	4	$\therefore \sum u^2 = 10$
u^2v	-288	-46	0	35	372	$\therefore \sum u^2 v = 73$
u^3	-8	-1	0	1	8	$\therefore \sum u^3 = 0$
u^4	16	1	0	1	16	$\therefore \sum u^4 = 34$

จากตารางนี้แทนค่าจากคอลัมน์ขวามือสุดลงในสมการ(23) จะได้

$$\begin{array}{rcl} -2 &=& 5a_0 + 10a_2 \\ 411 &=& 10a_1 \\ 73 &=& 10a_0 + 34a_2 \end{array}$$

เมื่อแก้ระบบสมการนี้จะได้ $a_0 = -11.4, a_1 = 41.1$ และ $a_2 = 5.5$ ดังนั้น สมการ(22) จึงเขียนได้ว่า

$$v = -11.4 + 41.1u + 5.5u^2$$

หรือ

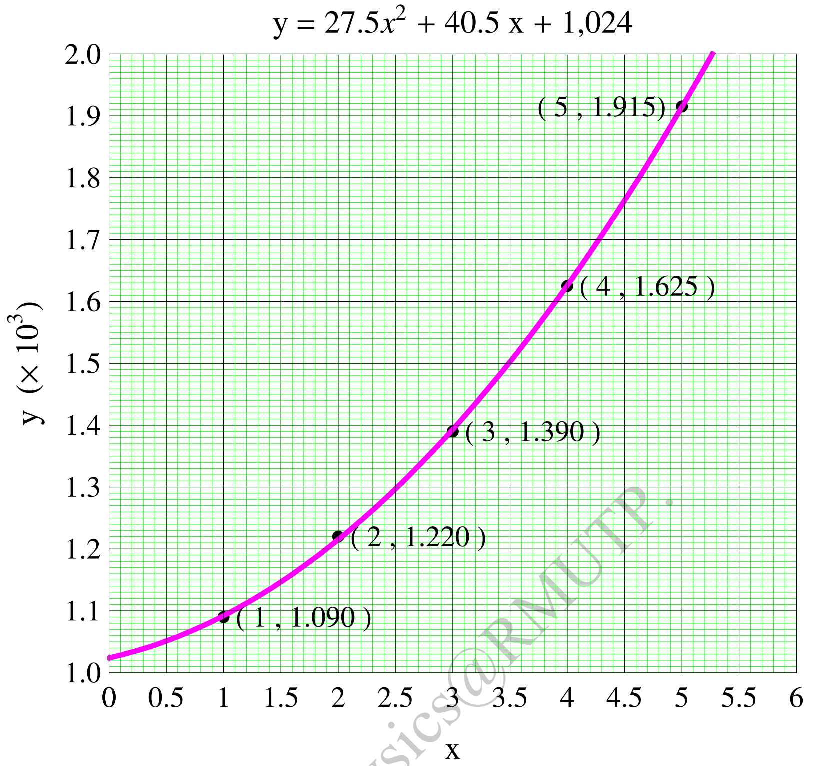
$$\frac{y - 1,450}{5} = -11.4 + 41.1(x-3) + 5.5(x-3)^2$$

ดังนั้น สมการพาราโบลา ที่เข้าได้กับข้อมูลได้ดีที่สุด คือ

$$y = 1,024 + 40.5x + 27.5x^2$$

<u>**ตอบ**</u>

โดยมีกราฟแสดงผลการฟิตสมการนี้กับข้อมูลแสดงดังรูป



รูปที่ 2: แสดงผลการฟิตข้อมูลเทียบกับสมการพาราโบลาที่ได้จากการวิเคราะห์ข้อมูลด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด

ตัวอย่างที่ 4 จงฟิตข้อมูลต่อไปนี้ให้อยู่ในรูป $y = ce^{mx}$ โดยที่ $e \simeq 2.71828$

x	0	2	4
y	5.012	10	31.62

พร้อมทั้งเขียนกราฟแสดงผลการเปรียบเทียบ

วิธีทำ สมการเส้นโค้งที่ต้องการ คือ $y = ce^{mx}$ เมื่อใส่ลอการิธึมฐาน e เข้าทั้งสองข้างของสมการนี้ จะได้

$$\ln y = \ln c + mx$$

ซึ่งอยู่ในรูปของสมการเส้นตรง (ในกระดาษกราฟกึ่งล็อก) ตามข้อสังเกตที่ 1 คือ

$$Y = MX + C \tag{24}$$

โดยที่ $Y = \ln y,\ M = m,\ X = x,\ C = \ln c$

สมการ(24) มีสมการปกติที่สอดคล้อง คือ

$$\left.\begin{array}{rcl} \sum Y & = & nC + M\sum X \\ \sum XY & = & C\sum X + M\sum X^2 \end{array}\right\} \tag{25}$$

โดยมี

$X = x$	0	2	4	$\therefore \sum X = 6$
y	5.012	10	31.62	
$Y = \ln y$	1.61184	2.30259	3.45379	$\therefore \sum Y = 7.3682$
X^2	0	4	16	$\therefore \sum X^2 = 20$
XY	0	4.60517	13.8152	$\therefore \sum XY = 18.4203$

จากตารางนี้แทนค่าจากคอลัมน์ขวามือสุดลงในสมการ(25) จะได้

$$\begin{aligned} 7.36821 &= 3C + 6M, \\ 18.4203 &= 6C + 20M \end{aligned}$$

เมื่อแก้ระบบสมการนี้ จะได้

$$C = 1.5351, M = 0.46048$$

ต่อไปจะทำการแปลงค่าคงที่ทั้งสองนี้กลับคืนไปสู่รูปแบบเริ่มต้น m และ c ดังนี้

จาก $C = \ln c$ จะได้

$$c = e^C = e^{1.5351} = 4.64179$$

และ จาก $M = m = 0.46048$ แล้วแทนค่า c และ m ที่ได้ลงในสมการ $y = ce^{mx}$ จะได้

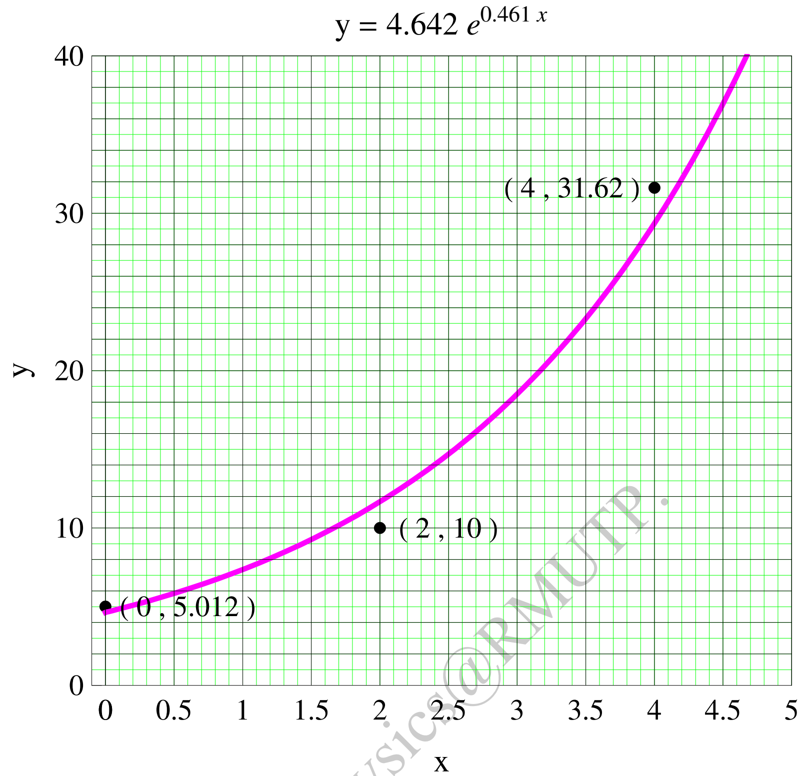
$$y = 4.64179e^{0.46048x}$$

หรือเขียนในรูปที่สั้นๆทศนิยมเพียง 3 ตำแหน่ง คือ

$$y = 4.642e^{0.461x}$$

<u>ตอบ</u>

โดยมีกราฟแสดงผลการฟิตสมการนี้กับข้อมูลแสดงดังรูปในหน้าถัดไป



รูปที่ 3: แสดงผลการฟิตข้อมูลเทียบกับสมการในรูปเอ็กซ์โปเนนเชียล $y = 4.642e^{0.461x}$ ที่ได้จากการวิเคราะห์ข้อมูลด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด

แบบฝึกหัด

1. กัมมันตภาพรังสีมีความเข้ม I พุ่งผ่านฉากตะกั่วจะถูกดูดกลืนไปบางส่วนขึ้นกับความหนา d ของแผ่นตะกั่ว ถ้าการทดลองใช้รังสีแกมมาพุ่งผ่านแผ่นตะกั่วความหนาต่างๆกัน แล้ววัดค่าความเข้มของรังสีหลังฉาก ได้ข้อมูลดังตารางต่อไปนี้

d(mm)	0	1.9	4.2	5.8	8.2	9.6
I(cps)	9,995	4,032	1,710	723	299	128

1.1 จงฟิตข้อมูลดังกล่าวเพื่อให้ได้สมการคณิตศาสตร์แทนความสัมพันธ์ระหว่าง ความหนาของแผ่นตะกั่ว (d) และความเข้มของรังสีแกมมา (I) ในรูปของ

$$I = I_0 e^{md}$$

(โดย I_0 และ m คือ ค่าคงที่) พร้อมทั้งเขียนกราฟแสดงผลการฟิตกับข้อมูลนี้ด้วย

1.2 จงหาความสัมพันธ์นี้โดยวิธีเขียนกราฟลงในกระดาษกราฟแบบกึ่งล็อก

2. ในการทำการทดลองเพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณ x และ y ได้ข้อมูลดังตาราง

x(หน่วย)	1.0	1.4	1.8	2.2	2.6	3.0	3.4
y(หน่วย)	30.0	22.5	17.5	13.5	11.5	10.0	9.0

2.1 จงฟิตข้อมูลดังกล่าวเพื่อให้ได้สมการคณิตศาสตร์แทนความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y ในรูปของ $y = ce^{mx}$ (โดย c และ m คือ ค่าคงที่) พร้อมทั้งเขียนกราฟแสดงผลการฟิตกับข้อมูลนี้ด้วย

2.2 จงหาความสัมพันธ์นี้โดยวิธีเขียนกราฟลงในกระดาษกราฟแบบกึ่งล็อก

3. จากการทดลองเรื่องการแกว่งนาฬิกาลูกตุ้ม ด้วยเชือกความยาว ℓ ต่างๆกัน วัดคาบการแกว่ง T ได้ดังนี้

ℓ(m)	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
T(s)	0.62	0.89	1.10	1.26	1.41

3.1 จงฟิตข้อมูลนี้ด้วยความสัมพันธ์ $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ พร้อมทั้งหาค่า g ด้วย
(แนะ เปลี่ยนตัวแปรโดยให้ $\sqrt{\ell} = x$ แล้วฟิตโดยใช้สมการเส้นตรง $T = a_0 + a_1 x$ ซึ่งเมื่อทราบ ส.ป.ส. a_1 ก็จะทราบ g ได้เช่นกัน)

3.2 จงเขียนกราฟระหว่าง T และ ℓ ลงในกระดาษกราฟแบบ ล็อก-ล็อก เพื่อหาจุดตัดของกราฟบนแกน T แล้ววิเคราะห์หาค่า g

3.3 จงเขียนกราฟระหว่าง T^2 และ ℓ ลงในกระดาษกราฟแบบธรรมดา แล้ววิเคราะห์จากกราฟที่ได้เพื่อหาค่า g จากความชันกราฟ

3.4 จงหาเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนของค่า g ที่ได้จากข้อ 3.1, 3.2 และ 3.3 เทียบกับค่า $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$

4. การทดลองเรื่องกำทอนของเสียง ได้ข้อมูลระหว่างความถี่เสียง f และ ความยาวคลื่นเสียง λ ดังตาราง

$f(\mathrm{Hz})$	500	1,000	1,500	2,000
$\lambda(\mathrm{m})$	0.69	0.34	0.23	0.17

ถ้าความสัมพันธ์ คือ $v = f\lambda$ เมื่อ v คือ อัตราเร็วของคลื่นเสียง

4.1 จงฟิตข้อมูลนี้ เพื่อหาค่า v

(แนะ เขียนความสัมพันธ์ให้อยู่ในรูป $f = v\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ แล้วฟิตข้อมูลโดยใช้สมการเส้นตรง $f = a_0 + a_1 x$ โดยให้ $x = \frac{1}{\lambda}$ จะได้ $v = a_1$ นั่นเอง)

4.2 จงเขียนกราฟระหว่าง f และ $1/\lambda$ ลงในกระดาษกราฟธรรมดา แล้ววิเคราะห์หา v จากความชันกราฟ

By

Dr. Chatchawal Sripakdee, Physics@RMUTP, Bangkok, Thailand